СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ,

(*служащая продолженіемъ второй Части Математическаго Курса Гдна. Безу*)

ПЕРЕВЕДЕНА

ДЛЯ

БЛАГОРОДНАГО ЮНОШЕСТВА,

ВОСПИТЫВАЮЩАГОСЯ

ВЪ

УНИВЕРСИТЕТСКОМЪ ПАНСІОНѢ.



МОСКВА,

ВЪ Университетской Типографіи,

у Ридигера и Клаудія.

1799.

Съ Дозволенія Московской Цензуры.



СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

Предварительныя понятія.

347. Сферическая Тригонометрія есть наука, въ которой преподаются правила для рѣшенія Сферическихъ треугольниковъ.

348. Сферической треугольникъ есть часть поверхности шара, заключающаяся между тремя круговыми дугами, изъ коихъ всѣ общимъ центромъ имѣютъ центръ шара, и слѣд. каждая изъ нихъ состоитъ изъ дуги большаго круга того же шара.

Естьли изъ каждаго угла A, F, G сферическаго треугольника A F G (*фиг.* 1), проведутся умственно три радіуса AC, FC, GC къ центру C шара, то можно представить себѣ пространство CAFG треугольною пирамидою, которой верхъ C находится въ центрѣ шара, а выпуклое основаніе AFG составляетъ часть поверхности его. Дуги AF,

FG, AG, или криволинѣйные бока основанія суть сѣченія поверхности шара съ плоскостями ACF, FCG, GCA, представляющими стороны той пирамиды.

Уголъ A, содержащійся между двумя дугами AF, AG, измѣряется прямолинѣйнымъ угломъ IAK, которой заключается между тангенсами AI, AK тѣхъ же двухъ дугъ. Каждой сей тангенсъ находится въ одной плоскости съ дугою, къ которой принадлежитъ, и каждый перпендикуляренъ къ радіусу AC (49), въ которомъ сходятся плоскости ACF, ACG; слѣд. (192) уголъ, заключающійся между сими двумя тангенсами, одинаковъ съ угломъ, которой содержится между плоскостями ACF, ACG двухъ дугъ; и слѣд.

349. 1е. *Всякой сферической уголъ FAG есть тотъ, которой заключается между плоскостями обоихъ его боковъ AF, AG.*

350. 2е. *Углы, состоящіе изъ дугъ большихъ круговъ, которые сходятся на поверхности шара, имѣютъ тѣже свойства, какъ и плоскіе; то есть, свойства, изъясненныя въ* (193, 194, 195).

351. И такъ *два бока сферическаго треугольника перпендикулярны между*

собою, когда содержащія ихъ плоскости бываютъ перпендикулярны.

Естьли вообразишь двѣ плоскости ACG, ACF, проведенными неопредѣленно во всѣ стороны, то можно увѣриться, что сѣченіе, сдѣланное каждою въ шарѣ, будетъ большой кругъ, и оба сіи большіе круги пересѣкутся взаимно на двѣ равныя части въ точкахъ A и D; потому что обѣ плоскости должны пройти чрезъ центръ, и слѣд будутъ имѣть общимъ сѣченіемъ діаметръ шара.

352. И такъ *два смѣжные бока* AG, AF *сферическаго треугольника не могутъ прежде сойтися отъ своего начала, какъ на разстояніи* AGD *или* AFD 180°.

353. Естьли взяты будутъ двѣ дуги AB, AE по 90°, и потомъ проведется чрезъ точки B, E и центръ C плоскость, которой сѣченіе составитъ въ шарѣ большой кругъ BENMO, то утверждаю, что кругъ сей будетъ перпендикуляренъ къ двумъ кругамъ ABD, AED.

Ибо по проведеніи радіусовъ BC, EC, углы ACB, ACE, имѣющіе мѣрою дуги AB, AE по 90°, будутъ прямые; почему линѣя AC перпендикулярна къ двумъ прямымъ линѣямъ CE, BC, и слѣд. она перпендикулярна (180) къ ихъ плоскости, то есть, къ

кругу BENMO; слѣд. оба круга, проходящіе по прямой AD перпендикулярны также къ сему кругу (186); и обратно кругъ сей перпендикуляренъ къ нимъ.

Какъ мы не предположили никакой опредѣленной величины углу GAF или EAB, то должно заключить, что доказанная истинна можетъ принята быть во всякомъ случаѣ, какой бы впрочемъ величины не былъ сей уголъ; и слѣд. кругъ BENMO остается всегда перпендикуляренъ ко всѣмъ другимъ кругамъ, проходящимъ чрезъ прямую AD.

Прямая линѣя AD называется *осью круга* BENMO; а двѣ точки A и D, изъ коихъ каждая лежитъ на поверхности шара, именуются *полюсами* того же круга.

354. Заключимъ изъ сего 1е. *что полюсы всякаго большаго круга равно отстоятъ отъ всѣхъ точекъ окружности его; и что каждое разстояніе полюсовъ отъ точекъ сихъ, измѣряемое дугою большаго круга, состоитъ изъ дуги* 90°.

И на оборотъ, *всякая точка* A *на поверхности шара, отстоящая на* 90° *отъ двухъ другихъ точекъ* B и E, *которыя находятся на дугѣ большаго круга, почитается полюсомъ сего круга.*

355. 2е. *Когда какая нибудь дуга* BF *большаго круга перпендикулярна къ другой* BE *большаго же круга; то она непремѣнно проходитъ чрезъ полюсъ сего послѣдняго, или по крайней мѣрѣ пройдетъ, будучи довольно продолжена.*

356. 3е. *Естьли двѣ дуги* BF, EG *большихъ круговъ перпендикулярны къ третей* BE *большаго же круга, то точка* A, *гдѣ онѣ сходятся, есть полюсъ сего послѣдняго.*

357. Поелику двѣ прямыя линѣи BC, EC перпендикулярны въ точкѣ C къ прямой AD, то уголъ BCE, состоящій изъ нихъ, долженъ (192) служить мѣрою склоненію двухъ плоскостей ABD, AED, или сферическому углу EAB, или GAF; слѣд.

Сферической уголъ GAF *имѣетъ мѣрою дугу* BE *большаго круга, которая заключается между его боками (продолженными въ случаѣ нужды) на растояніи* 90° *отъ верху.*

358. Естьли вообразимъ полкруга ABD обернувшимся около діаметра AD, и потомъ изъ разныхъ точекъ R, B, H окружности его опустимъ перпендикуляры RQ, BC, HP, то произойдетъ изъ сего . . .

1е. *Каждая изъ сихъ точекъ опишетъ окружность круга, имѣющаго центромъ точку на діаметрѣ AD, въ которую упадаетъ перпендикуляръ, а радіусомъ тотъ же перпендикуляръ.*

2е. *Дуги RS, BE, HL, описанныя при семъ обращеніи, и заключающіяся между двумя плоскостями ABD и AED, будутъ всѣ одного числа градусовъ.* Ибо по проведеніи прямыхъ SQ, EC, LP, всѣ сіи линѣи будутъ перпендикулярны къ AD, потому что онѣ представляютъ тѣ же радіусы RQ, BC, HP, проведенные въ плоскости AED; но каждой изъ угловъ (192) RQS, BCE, HPL, или каждая изъ дугъ RS, BE, HL измѣряетъ склоненіе двухъ плоскостей ABD, AED; слѣд. всѣ сіи дуги должны быть одного числа градусовъ.

3е. *Длины сихъ дугъ RS, BE, HL пропорціональны синусамъ дугъ AR, AB, AH, измѣряющихъ разстояніе первыхъ отъ полюса A, или пропорціональны косинусамъ разстояній своихъ отъ большаго круга, съ которымъ онѣ параллельны.* Сіе явствуетъ изъ того, что подобныя сіи дуги пропорціональны радіусамъ своимъ RQ, BC, HP; но радіусы сіи представляютъ, какъ видѣть

можно, синусы дугѣ AR, AB, AH, или косинусы дугѣ BR, o и BH.

359. Естьли вообразимѣ, что шарѣ ABDMOBN представляетѣ землю, а AD ось ея или поперешникѣ, около котораго она обращается ежедневно; вѣ такомѣ случаѣ кругѣ BENMO, равно отстоящій отѣ двухѣ полюсовѣ A и D, будетѣ изображать *экваторѣ* (равноденственная линѣя). Круги ABD, AED и всѣ имѣ подобные, которыхѣ плоскости проходятѣ чрезѣ ось AD, называются *меридіанами* (полуденники); меньшіе круги, коихѣ части представляются здѣсь дугами RS, HL, называются *параллельными кругами сѣ экваторомѣ* или просто *параллелями*. Дуги BH, EL, которыя измѣряютѣ разстояніе какой нибудь параллели отѣ экватора, именуются *широтою* той параллели, или мѣста, лежащаго на ея окружности.

Для опредѣленія положенія всякаго мѣста на земли, относится сіе мѣсто кѣ двумѣ постояннымѣ и перпендикулярнымѣ между собою кругамѣ, каковы ABDM, BENMO такимѣ образомѣ: принимается за сравнительной кругѣ меридіанѣ ABDM, проходящій чрезѣ извѣстное и опредѣленное мѣсто, потомѣ проводится умственно чрезѣ другое

мѣсто на пр. L, котораго требуется показать положенiе, другой меридiанъ AELD. Изъ сего явствуетъ, что положенiе сего меридiана становится тотчасъ извѣстнымъ, какъ скоро извѣстно число градусовъ дуги BE, заключающейся между точкою B и точкою E, гдѣ сей послѣднiй меридiанъ пересѣкается съ экваторомъ. А какъ точка B остается всегда непремѣняемою, и всѣ прочiе меридiаны къ ней относятся, то дуга BE представляетъ *длину* (*) меридiана AED и всѣхъ мѣстъ, лежащихъ на семъ меридiанѣ; слѣд. для означенiя положенiя мѣста L стоитъ только узнать еще число градусовъ дуги EL, которая называется *широтою* мѣста L и также всѣхъ прочихъ, стоящихъ на параллели, коей HL представляетъ только часть.

Хотя изъ предыдущаго понять не трудно, что всѣ мѣста, лежащiя на одномъ меридiанѣ, имѣютъ одинакую длину, и всѣ мѣста, стоящiя на одной параллели, имѣютъ одинакую широту; однакожъ нѣтъ другаго мѣста, кромѣ L (по крайней мѣрѣ въ

(*) Длины мѣстъ считаются обыкновенно отъ Запада на Востокъ; кругъ, отъ коего начинается счетъ, называется *первой Меридiанъ* и проходитъ чрезъ самой Западной Канарiйской островъ *Ферро*.

одной половинѣ земнаго шара или въ одной Гемисферѣ), которое бы могло имѣть данную длину и широту. Слѣд. положеніе мѣста бываетъ опредѣлено тогда, когда извѣстна длина его и широта; въ разсужденіи широты надобно сверхъ того еще знать, къ какому полюсу она относится. Такимъ образомъ положивъ, что точка A представляетъ Южной или Антарктической полюсъ, а D Сѣверный или Арктической, должно примѣчать о Южной или Сѣверной широтѣ дѣло идетъ; ибо нѣтъ никакого сумнѣнія, что въ Южной Гемисферѣ находится точка, разположенная такимъ же образомъ, какъ L въ Сѣверной.

Градусъ земнаго большаго круга полагается величиною въ 20 морскихъ миль; такимъ образомъ при всякомъ переѣздѣ на экваторѣ 20 миль перемѣняется градусъ длины, а на одномъ и томъ же меридіанѣ одинъ градусъ широты. Но при переѣздѣ на какой нибудь параллели 20 миль перемѣняется уже, какъ легко видѣть можно, больше градуса, и тѣмъ болѣе, чѣмъ пареллель, на которой подвигаемся впередъ, далѣе отстоитъ отъ экватора, или проходитъ чрезъ большую широту. Для опредѣленія, какому числу градусовъ длины отвѣчаетъ извѣстное

число миль HL, пройденныхъ на извѣстной параллели, надлежитъ сдѣлать слѣдующую посылку: *какъ косинусъ широты содержится къ радіусу, такъ число пройденныхъ миль на параллели будетъ содержаться къ четвертому члену*, то есть, къ числу миль дуги, сходственной съ дугою BE экватора, показывающаго перемѣну въ длинѣ. Истинна сія явствуетъ изъ сказаннаго (358). На пр. положивъ, что чрезъ широту 47°, 20′ пройдено на параллели 18 миль, спрашивается, сколькимъ градусамъ длины отвѣчаетъ число сихъ миль? Посылай *кос.* 47° 20′ или *син.* 42° 40′: R = 18^{м} къ четвертому члену, которой найдется 26^{м}, 56; раздѣли число сіе на 20, полагая 20 миль на градусъ, получишь 1°, 328 или безъ малаго 1°, 19′, 41″ за перемѣну длины.

Возвратимся къ свойствамъ шара.

360. Положимъ, что AFIG, BFHG (*фиг.* 2) представляютъ два большіе круга въ шарѣ, а ABDEIH третій большой же, пересѣкающій перпендикулярно предыдущіе; и такъ слѣдуетъ изъ сказаннаго (355), что кругъ ABDEIH проходитъ чрезъ полюсы обоихъ AFIG, BFHG; пусть полюсы сіи будутъ D и E, а KD и EL двѣ оси. Какъ углы ACD, BCE суть прямые, то по отня-

тiй у нихЪ общаго угла BCD, получимЪ вЪ остаткѣ два равные угла ACB, DCE, и по той же причинѣ дуги AB и DE будутЪ также равны между собою; слѣд. *дуга DE, измѣряющая самое кратчайшее разстоянiе между полюсами двухЪ большихЪ круговЪ, равняется дугѣ AB, которая измѣряетЪ самой меньшой уголЪ, заключающiйся между тѣми кругами.*

Свойства сферическихЪ треугольниковЪ.

361. Не трудно увѣриться, что чрезЪ двѣ точки, взятыя на поверхности шара, не можно провести больше одной дуги большаго круга. Ибо большой кругЪ представляется сѣченiемЪ шара такою плоскостiю, которая непремѣнно должна пройти чрезЪ центрЪ его; слѣд. чрезЪ три данныя точки кромѣ одной плоскости провести болѣе не можно.

362. Хотя нѣкоторыя части сферическаго треугольника могутЪ состоять болѣе нежели изо 180°, однакожЪ мы намѣрены разсуждать о тѣхЪ только треугольникахЪ, коихЪ каждая часть меньше 180°; потому что по послѣднимЪ можно опредѣлять первые. На пр. положимЪ, что треугольникЪ ABEMV (*фиг.* 1) состоитЪ изЪ дугЪ AB, AV, и дуги BMV больше 180°; и такЪ во-

образивъ цѣлой кругъ BMVB, можно принять за предыдущій треугольникъ другой BOVA, коего дуга BOV меньше 180°; потому что части перваго или равны частямъ втораго, или служатъ имъ дополненіемъ ко 180° или къ 360°; слѣд. одинъ изъ сихъ треугольниковъ опредѣляется другимъ.

363. *Каждой бокъ сферическаго треугольника меньше суммы двухъ прочихъ.*

Въ этомъ нѣтъ сомнѣнія.

364. *Сумма всѣхъ трехъ боковъ сферическаго треугольника всегда меньше* 360°.

Ибо изъ предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что FG должна быть меньше AG + AF; но AG + AF будучи сложены съ DG + DF составляютъ только что 360°; слѣд. AG + AF + FG будутъ меньше 360°.

365. *Положимъ, что* DEF (фиг. 3) *представляетъ какой нибудь сферической треугольникъ*, а ABC *другой такой, котораго точка* A *служитъ полюсомъ дугѣ* EF, *точка* C *полюсомъ дугѣ* DE *и точка* B *полюсомъ дугѣ* DF; *въ такомъ случаѣ каждой бокъ треугольника* DEF *будетъ дополненіемъ ко* 180° *противуположенному углу въ треугольникѣ* ABC, *и каждой уголъ сего же треугольника* DEF

будетъ дополненіемъ боку, которой противополагается ему въ треугольникѣ ABC.

Поелику точка A представляетъ полюсъ дуги EF, то точка E должна отстоять отъ точки A на 90° (354); по той же причинѣ точка E должна удалена быть на 90° отъ точки C, потому что сія послѣдняя служитъ полюсомъ дугѣ DE; слѣд. точка E (354) будетъ полюсъ дуги AC, равнымъ образомъ D полюсъ BC, и F полюсъ AB.

Доказавъ сіе, продолжимъ дуги AC, AB, пока онѣ сойдутся съ дугою EF въ точкахъ G и H. Но поелику точка E служитъ полюсомъ ACG, слѣд. дуга EG 90°, и понеже F есть полюсъ ABH, то дуга FH должна быть также 90°; слѣд. EG + FH или EG + FG + GH или EF + GH составляютъ по 180°; но GH измѣряетъ уголъ A (357), потому что каждая дуга AG, AH по 90°; слѣд. EF + A составляютъ 180°; слѣд. EF служитъ дополненіемъ углу A. Равнымъ образомъ доказано будетъ, что DE представляетъ дополненіе C, а DF дополненіе B.

Продолжимъ теперь дугу AB, пока она пересѣчется съ DF въ I. Каждая дуга AH, BI по 90°, потому что A и B представляютъ полюсы дугъ EF, DF; слѣд. AH + BI или AH + AB + AI или HI + AB составля-

ютЪ 180°; но HI измѣряетЪ уголЪ F (357); потому что точка F есть полюсЪ HI; почему F + AB равны 180°, и слѣд. F служитЪ дополненіемЪ AB. Равнымъ образомЪ доказано будетЪ, что E служитЪ дополненіемЪ AC, и D дополненіемЪ BC.

366. *Заключимъ изъ сего, что сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника составляетъ всегда меньше 540°, или утроеннаго числа 180°, но больше 180°.*

Ибо сумма трехЪ угловЪ A, B, C сЪ суммою трехЪ боковЪ EF, DF, DE состоитЪ изЪ утроеннаго числа 180° (365); почему 1е. сумма трехЪ угловЪ A, B, C должна быть меньше утроеннаго 180° или 540°. 2е. сумма трехЪ боковЪ EF, DF, DE состоитЪ (364) меньше нежели изЪ 360° или удвоеннаго 180°; слѣд. остается больше 180° для суммы трехЪ угловЪ A, B, C.

367. *И такъ сферической треугольникъ можетъ имѣть всѣ три угла прямыми, и также всѣ три угла тупыми.*

По сему можно заключить, что сумма трехЪ угловЪ сферическаго треугольника не бываетЪ всегда количествомЪ одинакимЪ, какЪ то мы видѣли вЪ прямолинѣйныхЪ

треугольникахъ, и слѣд. по двумъ извѣстнымъ угламъ не можно опредѣлить третьяго.

368. Поелику каждая часть треугольника DEF служитъ дополненіемъ противоположенной себѣ части въ треугольникѣ ABC, то неминуемо слѣдуетъ, что одинъ изъ сихъ треугольниковъ можно рѣшить другимъ, потому что по извѣстнымъ частямъ одного опредѣляются части другаго. Замѣчаніе сіе будетъ впередъ весьма полезно: и по причинѣ, что два треугольника ABC, DEF бываютъ въ рѣшеніяхъ часто употребляемы, назовемъ для сокращенія рѣчи DEF *дополнительнымъ треугольникомъ*.

369. *Два сферическіе треугольника, начерченные на одномъ шарѣ, или на равныхъ шарахъ, бываютъ равны*, 1е. *когда они имѣютъ по одному равному боку, лежащему при двухъ равныхъ углахъ порознь*; 2е. *когда они имѣютъ по одному равному углу, заключающемуся между двумя равными порознь боками*; 3е. *когда они имѣютъ по три бока равныхъ порознь*; 4е. *когда они имѣютъ по три угла равныхъ порознь*.

Три первые случая доказываются точно такъ, какъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ; *смотри* (80, 81, 83).

Чтожъ касается до четвертаго, то онъ требуетъ особаго доказательства, потому что его не было между прямолинѣйными треугольниками, и вотъ оно:

Представь, что для каждаго треугольника ABC и abc (*фиг.* 3 и 4) начерченъ дополнительной DEF и def. Естьли углы A, B, C равны порознь угламъ a, b, c; то бока EF, DF, DE, дополненія первыхъ угловъ должны быть также равны бокамъ ef, df, de, дополненіямъ послѣднихъ; слѣд. по третьему изъ предложенныхъ четырехъ случаевъ два треугольника DEF, def будутъ совершенно равны; а посему и углы D, E, F будутъ равны порознь угламъ d, e, f; слѣд. бока BC, AC, AB, дополненія трехъ первыхъ угловъ, должны быть равны бокамъ bc, ac, ab, дополненіямъ трехъ послѣднихъ.

370. *Въ равнобедренномъ сферическомъ треугольникѣ два угла, противоположенные равнымъ бокамъ, равны; и обратно, когда два угла сферическаго треугольника равны, то и бока, противоположенные имъ, также равны.*

Взявши на равныхъ бокахъ AB, AC (*фиг.* 5) равныя дуги AD, AE, начерти потомъ дуги большихъ круговъ DC, BE, отъ чего произойдутъ два равные треуголь-

ника ADC, AEB (369), потому что они будутъ имѣть одинъ общій уголъ, заключающійся между двумя равными боками порознь. Слѣд. дуга BE равна дугѣ CD, а посему равенству и два треугольника BDC, BEC будутъ также равны, потому что у нихъ, сверхъ равныхъ DC и BE, будетъ еще общій бокъ BC, и притомъ части BD, CE также равны, потому что онѣ представляютъ остатки двухъ равныхъ дугъ AB, AC, изъ коихъ вычтены равныя дуги AD, AE. Изъ равенства сихъ двухъ треугольниковъ можно неоспоримо заключить, что уголъ DBC или ABC равенъ углу ECB или ACB.

Чтожъ принадлежитъ до второй части предложенія, то она можетъ быть выведена изъ первой при воображеніи дополнительнаго треугольника; ибо когда два угла B и C (*фиг.* 3) будутъ равны, то и дополненія ихъ DF, DE должны быть также равны; а посему треугольникъ DEF будетъ равнобедренный; углы E и F будутъ равны, и слѣд. дополненія ихъ AC и AB будутъ также равны.

371. *Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ* ABC (фиг. 6) *самой большой бокъ противополагается самому большому углу, и обратно.*

Естьли уголъ B будетъ больше угла A, то можно провести внутрь треугольника дугу BD большаго круга такую, которая сдѣлаетъ уголъ ABD равной углу BAD; тогда BD будетъ равна AD (370); но BD + DC больше BC, слѣд. и AD + DC, или AC должна быть больше BC.

Обратное предложеніе можно доказать сходственнымъ образомъ, употребивъ дополнительный треугольникъ.

Выведенныя послѣднія предложенія полезны при рѣшеніи такихъ сферическихъ треугольниковъ, въ которыхъ искомыя части опредѣляются синусами, или тангенсами; но какъ по этимъ линѣямъ не можно узнать прямо величины искомой дуги, потому что синусъ или тангенсъ относится двояко къ дугѣ меньше или больше 90°; то познанія сіи все-таки остаются недостаточны для опредѣленія того, въ какихъ случаяхъ искомое должно быть больше, или меньше 90°, и въ какихъ случаяхъ оно можетъ быть равно больше и меньше.

Способы узнавать, въ какихъ случаяхъ искомые углы или бока сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ должны быть больше или меньше 90°.

372. Хотя въ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ могутъ быть два и даже всѣ три угла прямыми, и потому бы должно быть въ немъ двумъ или тремъ гипотенузамъ; однакожъ мы называть будемъ *гипотенузою* тотъ только бокъ, которой противополагается прямому углу, принимаемому въ разсужденіе, а прочіе два угла называть станемъ *косыми*.

373. *Каждой косой уголъ сферическаго прямоугольнаго треугольника бываетъ одинаковаго свойства съ противоположеннымъ ему бокомъ, то есть, онъ бываетъ 90°, когда сей бокъ 90°; онъ будетъ больше или меньше 90°, когда сей бокъ будетъ самъ больше или меньше 90°.*

Пусть B (*фиг.* 7.) будетъ прямой уголъ; естьли BC меньше 90°, то продолжи его до D, такъ чтобъ BD здѣлалась 90°, точка D будетъ полюсомъ дуги AB (355); слѣд. дуга большаго круга DA, проведенная до конца бока BA, будетъ перпендикулярна къ BA; слѣд. уголъ DAB будетъ прямой; слѣд. CAB

долженъ быть меньше 90°. Такимъ же образомъ доказаны будутъ два прочіе случая.

374. *Естьли въ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ оба бока или оба угла будутъ меньше или больше 90°, то гипотенуза въ такомъ случаѣ бываетъ всегда меньше 90°; напротивъ же она бываетъ больше 90°, когда оба бока или оба угла случаются равнаго свойства.*

Ибо естьли по допущеніи конструкціи предыдущаго предложенія, AB меньше 90°, то уголъ ADB, долженствующій (373) быть одного свойства съ бокомъ AB, будетъ меньше 90°; по той же причинѣ уголъ ACB будетъ меньше 90°; слѣд. уголъ ACD представляетъ тупой и будетъ больше ADC; слѣд. AD (371) должна быть больше AC; но AD равна 90°, слѣд. AC меньше 90°.

Равномѣрно естьли оба бока BC и AB прямаго угла B (*фиг.* 8), будутъ больше 90°, то гипотенуза AC и въ семъ случаѣ будетъ также меньше 90°: ибо взявши дугу BD 90°, получимъ точку D за полюсъ дуги AB и слѣд. DA будетъ 90°. Но поелику AB больше 90°, то уголъ ACB будетъ тупой (373); по той же причинѣ и уголъ ADB будетъ тупой; слѣд. уголъ ADC долженъ быть

острой и меньше ACD; почему AC будетЪ меньше AD (371), то есть, меньше 90°.

НапротивЪ когда AB (*фиг.* 9) бываетЪ меньше, а BC больше 90°, вЪ такомЪ случаѣ уголЪ ACB, имѣя (373) одинакое свойство сЪ AB, долженЪ быть острой; тоже и уголЪ ADB; слѣд. ADC будетЪ тупой и больше ACD; слѣд. AC будетЪ больше AD, то есть, больше 90°.

ЧтожЪ касается до угловЪ, сравнимаемыхЪ сЪ гипотенузою, то истинна сего предложенія выходитЪ изЪ того, что каждой изЪ обЪявленныхЪ угловЪ бываетЪ одинакаго свойства сЪ противоположеннымЪ ему бокомЪ (373).

375. ИзЪ разсматриванія гипотенузы слѣдуетЪ, 1е. *что бока будутъ одинаковаго или разнаго свойства тогда, когда гипотенуза сія будетъ меньше или больше 90°; тоже должно заключить и о косыхъ углахъ.*

376. 2е. *Естьли гипотенуза съ однимъ изъ боковъ будетъ одного или разнаго свойства, то другой бокъ будетъ въ первомъ случаѣ меньше, а въ другомъ больше 90°; тожъ должно заключить и объ углѣ, которой противополагается сему послѣднему боку.*

Правила, служащія къ рѣшенію прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

377. Рѣшеніе прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ основывается на трехъ правилахъ, которыя предложимъ по порядку, и потомъ объяснимъ примѣрами. Первое служитъ вообще какъ для прямоугольныхъ, такъ и косоугольныхъ треугольниковъ.

Сферическіе прямоугольные треугольники во всякомъ случаѣ рѣшатся по какой нибудь пропорціи, находящейся въ слѣдующихъ трехъ правилахъ.

378. *Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ* ABC (фиг. 10) *можно посылать сію пропорцію: какъ синусъ какого нибудь угла содержится къ синусу противоположеннаго ему бока, такъ синусъ другаго угла къ синусу бока, лежащаго противъ сего втораго угла.*

Пусть будетъ H центръ шара, а BH, AH, CH три радіуса: изъ верху угла A опусти на плоскость бока BC перпендикуляръ AD, и по сей линѣѣ проведи двѣ плоскости ADE, ADF такъ, чтобъ радіусы BH, CH были имъ перпендикулярны; линѣи AE, DE сѣченія двухъ плоскостей ABH, CBH съ

плоскостью ADE будутъ перпендикулярны къ общему пересѣченію HB тѣхъ же двухъ плоскостей, и слѣд. уголъ AED будетъ представлять склоненіе сихъ двухъ плоскостей (192); слѣд. онъ будетъ равенъ сферическому углу ABC (349); по той же причинѣ уголъ AFD равенъ сферическому углу ACB.

По предположеніи сего въ треугольникахъ ADC, ADF прямоугольныхъ въ D, можно вывести (299) двѣ слѣдующія пропорціи.

R : *син.* AED = AE : AD
и *син.* AFD : R = AD : AF

слѣд. (100) *син.* AFD : *син.* AED = AE : AF.

Но какъ линѣи AE, AF представляютъ перпендикуляры, опущенные изъ конца A дугъ AB, AC, на радіусы BH, CH, проходящіе чрезъ другіе концы тѣхъ же дугъ; почему перпендикуляры сіи будутъ синусами ихъ (273); и такъ по причинѣ равенства угловъ AED, AFD съ углами B и C, выведена будетъ наконецъ пропорція *син.* C *син.* B = *син.* AB : *син.* AC.

Равнымъ образомъ доказать можно, что *син.* C : *син.* A = *син.* AB : *син.* BC.

379. Естьли какой нибудь изъ сравниваемыхъ угловъ будетъ прямой, въ такомъ случаѣ синусъ его будетъ равенъ радіусу

(278), и пропорція можетъ изображена быть такъ: *какъ радіусъ содержится къ синусу гипотенузы, такъ синусъ какого нибудъ косаго угла будетъ къ синусу противоположеннаго себѣ бока.*

380. *Во всякомъ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ радіусъ содержится къ синусу какого нибудь бока, лежащаго при прямомъ углѣ, какъ тангенсъ косаго угла, противоположеннаго другому боку прямаго угла, къ тангенсу того же бока.*

Пусть B (*фиг.* 11.) будетъ уголъ прямой: изъ конца C бока BC проведи CI перпендикулярно къ радіусу BD шара, и по сей прямой CI продолжи плоскость CIE такъ, чтобъ радіусъ DA былъ къ ней перпендикуляренъ. Тогда уголъ IEC будетъ равенъ сферическому углу A; а поелику двѣ плоскости DBC, DBA предположены перпендикулярными между собою, то линѣя CI, перпендикулярная къ ихъ общему сѣченію DB, будетъ также (187) перпендикулярна къ плоскости DBA, и слѣд. къ прямой линѣѣ IE (180).

Доказавъ сіе, въ прямоугольномъ треугольникѣ DIC посылай (300) DI : CI = R:

танг. IDC; а въ прямоугольномъ треугольникѣ EIC по тому же правилу будетъ.

CI : IE = *танг* IEC : R.

Слѣд. (100) DI : IE = *танг.* IEC : *танг.* IDC или = *танг.* A : *танг.* BC, потому что уголъ IDC измѣряется другою BC. Но въ прямоугольномъ треугольникѣ IED выходитъ (299) DI : IE = R : *син.* IDE, или *син.* AB; слѣд. по причинѣ общагo содержанія DI къ IE будетъ R . *син.* AB = *танг.* A : *танг.* BC.

381. *Естьли въ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ* ABC (фиг. 12), *продолжатся два бока* BC, AC *какого нибудь косаго угла до* D *и* E *такъ, чтобъ дуги* BD *и* AE *были каждая по* 90°, *и потомъ концы* D *и* E *соединятся дугою большаго круга* DE, *то произойдетъ отъ того новой треугольникъ* CED *прямоугольной въ* E *такой, котораго части будутъ или равны частямъ треугольника* ABC, *или будутъ служить имъ дополненіемъ къ* 90°.

Продолжи бока AB и DE до пересѣченія ихъ въ точкѣ F; поелику BD 90° и перпендикулярна къ AB, точка D должна быть полюсомъ дуги AB (355); DF будетъ 90° и перпендикулярна къ AF; слѣд. растояніе отъ A до D равно 90°.

Поелику AE сдѣлана равна 90°, и притомъ разстояніе отъ D до A также 90°; слѣд. точка A представляетъ полюсъ DF (354); а изъ сего выходитъ AE перпендикулярною къ DF, и треугольникъ CED будетъ прямоуголенъ въ E.

По предположеніи сего неминуемо слѣдуетъ, что уголъ E равенъ углу B, что уголъ DCE равенъ углу ACB (350), что бокъ DC дополняетъ CB, что DE дополняетъ EF, которая служитъ (357) мѣрою угла CAB, и слѣд. DE есть дополненіе угла CAB, что CE дополняетъ AC, и что уголъ D, имѣющій (357) мѣрою BF дополненіе AB, самъ служитъ также дополненіемъ AB; и такъ части треугольника DCE въ самой вещи или равны частямъ треугольника ACB, или служатъ имъ дополненіемъ къ 90°.

Тожъ доказано будетъ и въ треугольникѣ AHI, которой происходитъ отъ подобнаго продолженія за верхъ угла A боковъ BA и AC косаго угла BAC до тѣхъ поръ, пока CH и BI будутъ по 90°.

382. Изъ сего слѣдуетъ, что по извѣстнымъ тремъ частямъ треугольника ABC можно опредѣлить три части каждаго треугольника CED, AHI. Явствуетъ также и

то, что по сысканнымъ остальнымъ тремъ частямъ треугольника ABC, можно узнать три прочія части въ двухъ треугольникахъ CED, AHI, и обратно.

И такъ при рѣшеніи треугольника ABC не можно непосредственно употреблять предписанныя (378, 380) правила, но надлежитъ въ помощь брать тотъ, или другой изъ показанныхъ двухъ треугольниковъ CED, AHI; и тогда, нашедши по какому нибудь изъ объявленныхъ правилъ части сихъ треугольниковъ, опредѣли потомъ части треугольника ABC, какъ предписано (381). Треугольники CED, AHI будутъ называться впередъ *дополнительными треугольниками.*

Естьли бока AB, AC, или AC, BC, которые въ доказанномъ (381) предложеніи были оба предположены меньше 90°, будутъ оба больше, или одинъ больше, а другой меньше 90°, какъ то видѣть можно въ треугольникѣ FBC (*фиг.* 13); то можно, не дѣлая выкладки для треугольника FBC, рѣшить напередъ треугольникъ ABC, происходящій отъ продолженія дугъ FC, FB до 180°; ибо по извѣстнымъ частямъ сего опредѣлятся части треугольника FBC. Впрочемъ такое рѣшеніе не должно почитать непремѣннымъ, потому что можно здѣлать его еще и тою

пропорцією, которая показана была для *фигуры* 12, будуть ли части треугольника больше или меньше 90°.

Замѣтимъ здѣсь, что для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ, такъ какъ прежде прямоугольныхъ прямолинѣйныхъ треугольниковъ довольно двухъ частей сверхъ прямаго угла, которой всегда бываетъ извѣстенъ, и приступимъ къ примѣрамъ.

ПРИМѢРЪ I.

По извѣстнымъ боку BC 15° 17′ *и углу* A 23° 42′ *требуется сыскать гипотенузу* AC.

Для опредѣленія гипотенузы можно непосредственно по изъясненному (379) правилу посылать сію пропорцію *син.* A : *син.* BC = R : *син.* AC; пропорція сія есть таже, какая изображена (379), только съ переставкою содержаній, и обращается въ настоящемъ случаѣ въ *син.* 23° 42′ : *син.* 15° 17′ = R : *син.* AC.

Производя дѣйствіе въ логариѳмахъ, получимъ - - -

Лог. *син.* 15° 17′ - - - - - - -	9, 4209330
Лог. радїуса - - - - - - - - -	1 . . . .
Ариѳ. дополн. лог. *син.* 23° 42 - - -	0, 3958304
Сумма или лог. *син.* AC - - - -	19, 8167634

Логариѳмъ сей отвѣчаетъ въ таблицахъ 40° 59′. Такимъ образомъ гипотенуза AC будетъ 40° 59′ естьли она должна быть меньше 90°; или она будетъ 139° 1′ дополненіе 40° 59′, когда должна быть больше 90°; ибо здѣсь ничто не опредѣляетъ, меньше или больше 90° должна быть гипотенуза AC; почему оба сіи рѣшенія возможны, какъ въ томъ увѣриться не трудно изъ *фигуры* 13, въ которой оба треугольника ABC, ADE могутъ съ общимъ угломъ A имѣть равные бока BC, DE и разныя гипотенузы AC, AE; но по продолженіи AC, AB до пересѣченія ихъ въ F можно легко увидѣть, что AE служитъ дополненіемъ AC, потому что она дополняетъ FE равную AC, естьли DE равна будетъ BC.

ПРИМѢРЪ II.

Для опредѣленія бока AB *того же треугольника* ABC (фиг. 12.) можно послать прямо выведенную изъ показаннаго (380) предложенія пропорцію R : *син.* AB = *танг.* A : *танг.* BC, или *танг.* A : *танг.* BC = R : *син* AB, то есть, *танг.* 23° 42′ : *танг.* 15° 17′ = R: *син.* AB. Производя дѣйствіе въ логариѳмахъ, получимъ - - -

Лог. *танг.* 15° 17′ - - - - - -	9,4365704
Лог. радїуса - - - - - - -	1. . . . . . .
Ариѳ. допол. лог. *танг.* 23° 42′ - - -	0.3575658
Сумма или лог. *син.* AB - - - - - - -	19,7941362

Которой въ таблицахъ отвѣчаетъ 38° 30′; такимъ образомъ бокъ AB будетъ 38° 30′, или 141° 30′, глядя потому, меньше или больше 90° долженъ онъ быть, то есть, къ какому треугольнику (*фиг.* 13) должно его относить, къ ABC или ADE.

Примѣръ III.

Естьли бы по тѣмъ же извѣстнымъ частямъ, то есть по прямому углу, углу A *и боку* BC *требовалось найти уголъ* C *въ томъ же треугольникѣ* ABC (фиг. 12); то не трудно примѣтить, что здѣсь не можно употребить ни одной изъ показанныхъ (378, 380) посылокъ, потому что какъ для одной, такъ и для другой не больше двухъ членовъ будетъ извѣстно; и для того надлежитъ взять въ помощъ дополнительной треугольникъ DCE, въ которомъ бокъ DE, дополненіе угла A 23° 42′, будетъ 66° 18′, бокъ или гипотенуза DC дополненіе BC или 15° 17′, будетъ 74° 43′, и уголъ DCE, равный искомому углу ACB; но послѣдній сей треугольникъ, подведенъ будучи подъ правило (379), разрѣшится такимъ обра-

зомъ, *син.* DC : R = *син.* DE : *син.* DCE; то есть, *син.* 74° 43′ : R = *син.* 66° 18′ : *син.* DCE.

А производя въ логариѳмахъ, получишь.

Лог. *син* 66° 18′ - - - - - - - -	9,9617355
Лог. радїуса - - - - - - - - - - - -	10.......
Ариѳ. дополн. лог. *син.* 74° 43′ - - -	0,0156374
Сумма или лог. *син.* DCE - - -	19,9773729

Логариѳмъ сей въ таблицахъ отвѣчаетъ 71° 40′; и такъ уголъ DCE, и слѣд. искомой уголъ ACB будетъ 71° 40′, или 108° 20′, то есть, онъ будетъ состоять изъ дополненія 71° 40′; ибо здѣсь ничто не опредѣляетъ треугольника ACB, таковъ ли онъ, каковъ ACB (*фиг.* 13), или каковъ AED въ той же *фигурѣ*; и слѣд. не извѣстно за какой именно должно принять искомой уголъ, за ACB или AED его дополненіе.

ПРИМѢРЪ IV.

Даны въ треугольникѣ ABC (фиг. 12) *сверхъ прямаго угла бокъ* AB 48° 51′ *и бокъ* BC 37° 45′; *требуется найти гипотенузу* AC.

При рѣшеніи сего треугольника надлежитъ въ помощь взять дополнительной его DCE, въ которомъ будутъ извѣстны гипотенуза DC 52° 15′, дополненіе BC или 37°

45′, также уголъ D 41° 9′, потому что онъ имѣетъ мѣрою BF дополненіе AB или 48° 51′; и такъ сыскавши въ семъ послѣднемъ треугольникѣ бокъ CE, можешь по оному опредѣлить гипотенузу AC, коей тотъ бокъ служитъ дополненіемъ. А чтобъ въ треугольникѣ DCE найти CE, то пошли слѣдующую пропорцію (379) R : *син.* DC = *син.* D : *син.* CE, то есть, R : *син.* 52° 15′ = *син.* 41° 9′ : *син.* CE; и производя дѣйствіе въ логариѳмахъ получишь . . .

Лог. *син.* 41° 9′ - - - - - - - - - - -	9,8182474
Лог. *син.* 52° 15′ - - - - - - - - -	9,8980060
Сумма - - - - - - - - - - - - - -	19,7162534
Лог. радїуса - - - - - - - - - - - -	10 - - - -
Остатокъ или лог. *син.* CE - - - - -	9,7162534,

которой въ таблицахъ отвѣчаетъ 31° 21′; слѣд. гипотенуза AC, служащая дополненіемъ CE, будетъ только что 58° 39′; ибо при двухъ бокахъ AB, BC одинакаго свойства, гипотенуза должна быть всегда (374) меньше 90°.

ПРИМѢРЪ V.

Для опредѣленія угла C *или угла* A *по тѣмъ же даннымъ частямъ*, надлежитъ посылать непосредственно выведенную изъ предложенія (380) для угла A пропорцію, R : *син.* AB = *танг.* A : *танг.* BC, или

син. AB : R = *танг* BC : *танг.* A, то есть, *син.* 48° 51′ : R = *танг.* 37° 45′ : *танг.* A; а для угла C пропорцію *син.* BC : R = *танг.* AB : *танг.* C, то есть, *син.* 37° 45′ : R = *танг.* 48° 51′ : *танг.* C.

Производя дѣйствіе въ логариѳмахъ, получишь

Для угла A

Лог. *танг.* 37° 45′ - - - - - - - - -	9,8888996
Лог. радїуса - - - - - - - - - - - -	10 - - - -
Ариѳм. дополн. лог. *син.* 48° 51′ - -	0,1232111
Сумма или лог. *танг.* A - - - - - -	10,0121107

Для угла C

Лог. *танг.* 48° 51′ - - - - - - - - -	10,0585415
Лог. радїуса - - - - - - - - - - - -	10 - - - -
Ариѳм. допол. лог. *син.* 37° 45′ - -	0,2130944
Сумма или лог. *танг.* C - - - - -	10,2716359.

по отнятіи единицы у первой цыфры, какъ было предписано (*Арие.* 231).

Логариѳмы сіи отвѣчаютъ въ таблицахъ 45° 48′ и 61° 51′, изъ которыхъ первое будетъ величиною угла A, а второе угла C; потому что при двухъ бокахъ AB, BC кои меньше 90°, углы A и C (373) должны быть также меньше 90°.

Сіи примѣры могутъ научить, какимъ образомъ должно поступать при рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ во всѣхъ другихъ случаяхъ; но чтобъ предохранить отъ тру-

да тѣхъ, которымъ нужно будетъ дѣлать выкладку посредствомъ дополнительныхъ треугольниковъ, то прилагается здѣсь таблица, показывающая посылки на всѣ случаи.

Смотри приложенную таблицу.

Всѣ пропорціи, заключающіяся въ сей таблицѣ, основываются на двухъ правилахъ, показанныхъ (378, 380), и производятся или непосредственно въ треугольникѣ ABC, или въ дополнительныхъ его треугольникахъ; на примѣръ первая представляетъ пропорцію (378 или 379), и производится непосредственно въ треугольникѣ ABC, только съ перестaвкою содержаній. Вторая относится къ пропорціи (380) и производится въ дополнительномъ треугольникѣ CED такъ, R : *син.* DE = *танг.* D : *танг.* CE, или относительно къ треугольнику ABC, R : *кос.* A = *кот.* AB : *кот.* AC, или по перестaвкѣ перваго содержанія на мѣсто втораго, *кот.* AB : *кот.* AC = R : *кос.* A.

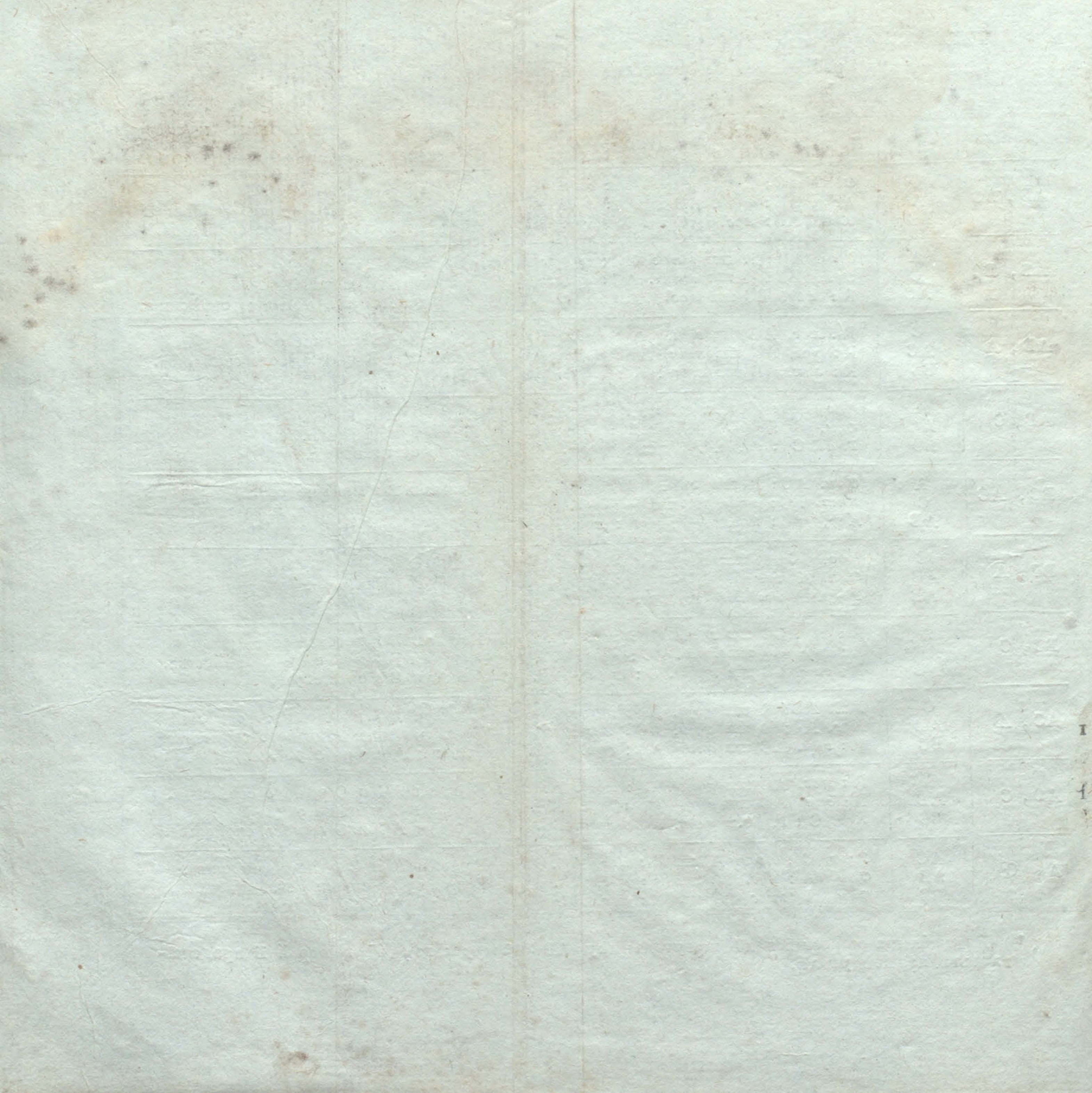
Находятся еще въ сей таблицѣ и другія пропорціи; совсѣмъ тѣмъ не должно почитать перестaвки въ посылкахъ, выводимыхъ непосредственно изъ правилъ (178 и 180) за необходимыя, потому что онѣ здѣланы единственно для того, чтобъ искомое количество было четвертымъ членомъ пропорціи.

Таблица, служащая для рѣшенія всѣхъ возможныхъ случаевъ въ прямоугольныхъ Сферическихъ Треугольникахъ. (*)

Къ стр. 36.

Даны	Найти	Пропорціи, которыя должно дѣлать	Случаи, въ которыхъ искомое должно быть меньше 90°.
AB, AC	C	*Син.* AC : R = *син.* AB : *син.* C.	Естьли AB меньше 90°.
	A	*Кот.* AB : *кот.* AC = R : *кос.* A.	Естьли AB и AC одного свойства.
	BC	*Кос.* AB : *кос.* AC = R : *кос.* BC	Естьли B и AC одного свойства.
AB, BC	A	*Син.* AB : R = *танг.* BC : *танг.* A.	Естьли BC меньше 90°.
	C	*Син.* BC : R = *танг.* AB : *танг.* C.	Естьли AB меньше 90°.
	AC	R : *кос.* BC = *кос.* AB : *кос.* AC.	Естьли AB и BC одного свойства.
AB, A	C	R : *кос.* AB = *син.* A : *кос.* C.	Естьли AB меньше 90°.
	AC	R : *кос.* A = *кот.* AB : *кот.* AC.	Естьли AB и A одного свойства.
	BC	R : *син.* AB = *танг.* A : *танг.* BC.	Естьли A меньше 90°.
AB, C	A	*Кос.* AB : R = *кос.* C : *син.* A.	Подъ сумнѣніемъ.
	AC	*Син.* C : *син.* AB = R : *син.* AC.	Подъ сумнѣніемъ.
	BC	*Танг.* C : *танг.* AB = R : *син.* BC.	Подъ сумнѣніемъ.
BC, AC	A	*Син.* AC : R = *син.* BC *син.* A.	Естьли BC меньше 90°.
	C	*Кот.* BC : *кот.* AC = R : *кос.* C.	Естьли AC и BC одного свойства.
	AB	*Кос.* BC : *кос.* AC = R : *кос.* AB.	Естьли AC и BC одного свойства.
BC, A	C	*Кос.* BC : R = *кос.* A *син.* C.	Подъ сумнѣніемъ.
	AC	*Син.* A : *син.* BC = R : *син.* AC.	Подъ сумнѣніемъ.
	AB	*Танг.* A : *танг.* BC = R : *син.* AB.	Подъ сумнѣніемъ.
BC, C	A	R : *кос.* BC = *син.* C : *кос.* A.	Естьли BC меньше 90°.
	AC	R : *кос.* C = *кот.* BC : *кот.* AC.	Естьли BC и C одного свойства.
	AB	R : *син.* BC = *танг.* C : *танг.* AB.	Естьли C меньше 90°.
AC, A	C	*Кос.* AC : R = *кот.* A : *танг.* C.	Естьли AC и A одного свойства.
	AB	*Кос.* A : R = *кот.* AC : *кот.* AB.	Естьли AC и A одного свойства.
	BC	R : *син.* AC = *син.* A : *син.* BC.	Естьли A меньше 90°.
AC, C	A	R : *кос.* AC = *танг.* C : *кот.* A.	Естьли AC и C одного свойства.
	AB	R : *син.* AC = *син.* C : *син.* AB.	Естьли C меньше 90°.
	BC	*Кос.* C : R = *кот.* AC : *кот.* BC.	Естьли AC и C одного свойства.
A, C	AC	*Танг.* C : *кот.* A = R : *кос.* AC.	Естьли A и C одного свойства.
	AB	*Син.* A : *кос.* C = R : *кос.* AB.	Естьли C меньше 90°.
	BC	*Син.* C : *кос.* A = R : *кос.* BC.	Естьли A меньше 90°.

(*) Сія таблица относится къ треугольнику ABC *фигуры* 12, въ которой B представляетъ прямой уголъ.



Посредствомъ сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ исчисляемъ прямыя восхожденія и склоненія свѣтилъ, принимая въ разсужденіе градусы длины и широты ихъ, и обратно; однако здѣсь еще не мѣсто давать понятіе объ Астрономіи по объясненнымъ началамъ сферической Тригонометріи.

О Косоугольныхъ Сферическихъ Треугольникахъ.

383. Прямоугольные сферическіе треугольники рѣшатся во всѣхъ случаяхъ, какъ видѣть можно изъ предыдущаго, одною посылкою, но косоугольные не всегда: во многихъ случаяхъ должно производить двѣ пропорціи, и описывать изъ какого нибудь угла даннаго треугольника дугу большаго круга перпендикулярно къ противоположенному боку. А какъ дуга сія можетъ упасть или на самой бокъ, или на продолженіе его, глядя по величинѣ боковъ и угловъ, то за нужное почитаемъ, предъ объясненіемъ правилъ для рѣшенія такого свойства треугольниковъ, показать, въ какомъ случаѣ перпендикулярная дуга падаетъ внутрь треугольника, и въ какомъ внѣ треугольника.

384. *Дуга большаго круга* AD (фиг. 15), *опущенная перпендикулярно изъ*

угла A *сферическаго треугольника* ABC *на противоположенной бокъ, падаетъ внутрь треугольника тогда, когда два прочіе угла его* B *и* C *будутъ одного свойства, а внѣ треугольника, когда углы сіи будутъ разнаго свойства.*

Ибо въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADC, ADB (*фиг.* 15) углы B и C должны быть одного свойства съ противоположенным бокомъ AD (373); слѣд. они должны быть одного свойства и между собою.

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADC, ADB (*фиг.* 16) углы ACD, ABD должны быть одного свойства съ противоположенным бокомъ AD; а какъ ABC есть дополненіе ABD, то ABC и ACD должны быть разнаго свойства.

Правила для рѣшенія Косоугольныхъ Сферическихъ Треугольниковъ.

385. Рѣшеніе косоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ основывается на пяти правилахъ, которыя мы тотчасъ покажемъ и на рѣшеніи прямоугольныхъ треугольниковъ; всѣ сіи правила не нужны вдругъ для каждаго случая, но употребляются по приличію вообще для рѣшенія всѣхъ треугольниковъ.

Изъ сихъ пяти правилъ два изъяснены (365, 378); прочія три слѣдуютъ.

386. *Естьли въ сферическомъ треугольникѣ* ABC (фиг. 14) *опустится изъ какого нибудь угла* A *дуга большаго круга* AD *перпендикулярно на противоположенной бокъ* BC, *то происходитъ всегда такая пропорція, какъ косинусъ отрѣзка* BD *содержится къ косинусу отрѣзка* CD, *такъ косинусъ бока* AB *къ косинусу бока* AC.

Положимъ G за центръ шара: изъ верху угла A опусти на плоскость BCG дуги BC перпендикуляръ AI; сей перпендикуляръ будетъ въ плоскости AGD дуги AD. Проведи чрезъ AI двѣ плоскости AIE, AIF, такъ чтобъ радіусы GB и GC были къ нимъ перпендикулярны; изъ точки D поставь равнымъ образомъ перпендикуляры DH, DK на тѣ же радіусы.

Треугольники GIE, GDH по причинѣ линѣй IE, DH, перпендикулярныхъ къ GB, подобны; по той же причинѣ и треугольники GDK, GIF подобны. А изъ сего выходятъ слѣдующія двѣ пропорціи,

$$GH : GE = GD : GI$$
$$\text{и } GK : GF = GD : GI$$

И такъ по причинѣ одинакаго содержанія GD къ GI, будетъ GH : GE = GK : GF. Но GH (274) есть косинусъ BD, GE косинусъ AB, GK косинусъ CD, GF косинусъ AC; слѣд. *кос.* BD : *кос.* AB = *кос.* CD : *кос.* AC, или по перестановкѣ среднихъ членовъ . . .

кос. BD : *кос.* CD = *кос.* AB : *кос.* AC

387. *Предположивъ опредѣленными части предыдущей пропорціи, можно вывести изъ нее и слѣдующую другую: какъ синусъ* BD *содержится къ синусу* CD, *такъ котангенсъ угла* B *къ котангенсу угла* C.

Ибо углы AEI, AFI равны порознь угламъ B и C, какъ мы то видѣли еще (378); и такъ по причинѣ прямоугольныхъ треугольниковъ AIE, AIF, углы EAI, FAI будутъ дополненіями угловъ AEI, AFI, и слѣд. угловъ B и C.

Доказавъ сіе, можно послать въ треугольникѣ AEI сію пропорцію (300), R : *танг.* EAI или *кот.* B = AI : IE; а въ прямоугольномъ треугольникѣ AIF, *танг.* IAF или *кот.* C : R = IF : AI; слѣд. (100) *кот.* C : *кот.* B = IF : IE.

Но изъ подобія треугольниковъ GFI, GKD и треугольниковъ GEI, GHD выходитъ,

IF : DK = GI : GD
IE : DH = GI : GD
Слѣд. IF : DK = IE : DH
или IF : IE = DK : DH

Слѣд. *кот.* C : *кот.* B = DK : DH; но DK и DH суть синусы сегментовъ DC и DB; чего ради *кот.* C : *кот.* B = *син.* DC : *син.* DB.

388. *Естьли въ сферическомъ треугольникѣ* ABC (фиг. 15) *проведется изъ угла* A *перпендикулярная дуга* AD *на противоположенной бокъ* BC, *то происходитъ такая пропорція: какъ тангенсъ половины бока* BC *содержится къ тангенсу половинной суммы двухъ прочихъ боковъ, такъ тангенсъ половинной ихъ разности къ тангенсу половинной разности двухъ отрѣзковъ* CD *и* BD, *или* (фиг. 16) *къ тангенсу половинной ихъ суммы.*

Видѣли (386), что *кос.* AB : *кос.* AC = *кос.* BD : *кос.* CD; слѣд. (98) *кос.* AB + *кос.* AC : *кос.* AB — *кос.* AC = *кос.* BD + *кос.* CD : *кос.* BD — *кос* CD; но (288) *кос.* AB + *кос.* AC : *кос.* AB — *кос.* AC =

кот. $\frac{AC + AB}{2}$: *танг.* $\frac{AC - AB}{2}$; и по той же причинѣ *кос.* BD + *кос.* CD : *кос.* BD — *кос.* CD = *кот.* $\frac{CD + BD}{2}$: *танг.* $\frac{CD - BD}{2}$; слѣд. *кот.* $\frac{AC + AB}{2}$: *тан.* $\frac{AC - AB}{2}$ = *кот* $\frac{CD + BD}{2}$: *танг.* $\frac{CD - BD}{2}$, или *кот.* $\frac{AC + AB}{2}$: *кот.* $\frac{CD + BD}{2}$ = *танг.* $\frac{AC - AB}{2}$: *танг.* $\frac{CD - BD}{2}$, или по причинѣ, что котангенсы взаимно пропорціональны тангенсамъ, *танг.* $\frac{CD + BD}{2}$: *танг.* $\frac{AC + AB}{2}$ = *танг.* $\frac{AC - AB}{2}$: *танг.* $\frac{CD - DB}{2}$. Но CD + BD въ *фигурѣ* 15 равно BC, а въ *фигурѣ* 16 CD — BC равно BC ; слѣд. для *фиг* 15 служитъ пропорція, *танг.* $\frac{BC}{2}$: *танг.* $\frac{AC + AB}{2}$ = *танг.* $\frac{AC - AB}{2}$: *танг.* $\frac{CD - BD}{2}$, а для *фиг.* 16 служитъ *танг.* $\frac{CD + BD}{2}$: *танг.* $\frac{AC + AB}{2}$ = *танг.* $\frac{AC - AB}{2}$: *танг.* $\frac{BC}{2}$, или *танг.* $\frac{BC}{2}$: *танг.* $\frac{AC + AB}{2}$ = *танг.* $\frac{AC - AB}{2}$: *танг.* $\frac{CD + BD}{2}$

О рѣшеніи Сферическихъ Косоугольныхъ Треугольниковъ.

389. Помощію изъясненныхъ правилъ и второй посылки, заключающейся въ таблицѣ прямоугольныхъ треугольниковъ, можно рѣшить сферическіе косоугольные треугольники, или по крайней мѣрѣ опредѣлить синусы или тангенсы разныхъ частей, изъ которыхъ они состоятъ: во многихъ случаяхъ довольно трехъ извѣстныхъ частей для опредѣленія всѣхъ прочихъ, но въ нѣкоторыхъ сіе требованіе остается неопредѣленнымъ, потому что по тремъ даннымъ частямъ не можно положительно утвердить объ искомой, больше ли она должна быть или меньше 90°. Хотя, разсматривая вообще, число послѣднихъ случаевъ не мало, однакожъ весьма рѣдко въ обыкновенныхъ употребленіяхъ сферической Тригонометріи бываетъ такъ, чтобъ при рѣшеніи треугольника оставалось не извѣстнымъ то, какого свойства долженъ быть искомой бокъ или уголъ.

Предъ вступленіемъ въ самую матерію припомнимъ, что синусъ, косинусъ, тангенсъ и котангенсъ угла или дуги больше 90° остаются тѣжъ, какіе служатъ дополненію ихъ ко 180°.

390. При рѣшеніи косоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ находится шесть главныхъ случаевъ, изъ которыхъ проистекаютъ другіе шесть: предложимъ первые.

ВОПРОСЪ I.

По даннымъ двумъ бокамъ AB, AC *и противоположенному углу* B (фиг. 15), *найти уголъ* C, *лежащій противъ другаго даннаго бока?*

Для рѣшенія сего вопроса пошли пропорцію (378), *син.* AC : *син.* AB = *син.* B : *син.* C. Уголъ C можетъ быть больше и меньше 90°.

ВОПРОСЪ II.

По даннымъ двумъ бокамъ AB, AC (фиг. 15) *и противоположенному углу* B, *найти третій бокъ* BC?

Изъ угла A, лежащаго противъ искомаго бока, вообрази перпендикулярную дугу AD, и въ прямоугольномъ треугольникѣ ADB опредѣли отрѣзокъ BD пропорціею, которая сходствуетъ со второю, показанною въ таблицѣ *на страницѣ* 36.

кос. B : R = *кот.* AB : *кот.* BD.

Или слѣдующею другою . . .

R : *кос.* B : = *танг.* AB : *танг.* BD, которая представляетъ одну и туже съ предыдущею, потому что тангенсы взаимно пропорцiональны котангенсамъ.

Потомъ опредѣли другой отрѣзокъ CD сею посылкою (386):

кос. AB : *кос.* AC = *кос.* BD : *кос.* CD.

Наконецъ глядя потому, какъ упадаетъ AD внутрь или внѣ треугольника, получишь BC, взявши сумму или разность BD и DC.

ВОПРОСЪ III.

По даннымъ двумъ угламъ B *и* C (фиг. 15) *и противоположенному боку* AB, *найти бокъ* BC, *заключающiйся между извѣстными углами?*

Изъ угла A, противоположеннаго искомому боку BC, проведи на BC перпендикулярную дугу AD, и опредѣли въ прямоугольномъ треугольникѣ ADB отрѣзокъ BD показанною въ предыдущемъ вопросѣ II посылкою, именно:

R : *кос.* B = *танг.* AB : *танг.* BD.

Опредѣли вторый отрѣзокъ CD сею другою пропорцiею (387):

кот. B : *кот.* C = *син.* BD : *син.* CD

Наконецъ получишь BC, взявши сумму или разность CD съ BD глядя по тому, какъ упадаетъ перпендикулярная дуга внутрь или внѣ треугольника.

ВОПРОСЪ IV.

По даннымъ двумъ бокамъ AB, BC (фиг. 15) *и заключающемуся между ими углу* B, *найти третiй бокъ* AC?

Изъ какого нибудь неизвѣстнаго угла A проведи на противоположенной ему бокъ BC перпендикулярную дугу AD; опредѣли отрѣзокъ BD по пропорцiи вопроса II.

R : *кос.* B = *танг.* AB : *танг.* BD

Вычти BD изъ извѣстнаго бока BC (*фиг.* 15), или сложи его съ нимъ (*фиг.* 16), чрезъ что получишь отрѣзокъ CD; потомъ для опредѣленiя AC посылай сiю пропорцiю (386),

кос. BD : *кос.* CD = *кос.* AB : *кос.* AC

ВОПРОСЪ V.

По даннымъ двумъ бокамъ AB, BC (фиг. 15) *и углу* B, *заключающемуся между ими, найти какой нибудь изъ остальныхъ двухъ угловъ, на пр. уголъ* C?

Изъ третьяго угла A проведи на противоположенной ему бокъ BC перпендикулярную лугу AD. Вычисли отрѣзокъ BD по пропорціи вопроса II.

R : *кос.* B = *танг.* AB : *танг.* BD.

Вычти BD изъ извѣстнаго бока BC (*фиг.* 15), или сложи его съ нимъ (*фиг.* 16), чрезъ что получишь отрѣзокъ CD; напослѣдокъ опредѣли уголъ C, посылая показанную (387) пропорцію . . .

син. BD : *син.* CD = *кот.* B : *кот.* C.

ВОПРОСЪ VI.

По даннымъ тремъ бокамъ AB, AC, BC (фиг. 15), *найти какой нибудь уголъ, на примѣръ уголъ* B?

По проведеніи перпендикулярной дуги AD къ боку BC, которой находится при искомомъ углѣ, опредѣли половинную разность двухъ отрѣзковъ BD, DC слѣдующею пропорціею (388), *танг.* $\frac{BC}{2}$: *танг.* $\frac{AB + AC}{2}$ = *танг.* $\frac{AC - AB}{2}$: *танг.* $\frac{CD - DB}{2}$. Сыскавши половинную сію разность, вычти ее изъ половины BC, чрезъ что получишь (305) меньшой отрѣзокъ BD. Потомъ для опредѣленія угла B посылай ту же пропорцію, ко-

торая показана была въ вопросѣ II, но съ перестановкою содержаній:

танг. AB : *танг.* BD = R : *кос.* B.

Естьли перпендекулярная дуга должна упасть внѣ треугольника, то изъ первой пропорціи выдетъ не полразности, но полсуммы: почему въ такомъ случаѣ для опредѣленія меньшаго отрѣзка BD (*фиг.* 16), надлежитъ вычесть половину BC изъ сысканной полсуммы, потому что BC будетъ представлять здѣсь разность двухъ отрѣзковъ.

Можно также рѣшить сей вопросъ слѣдующимъ другимъ правиломъ.

Возьми половину суммы трехъ боковъ: изъ сей половинной суммы вычти поодиначкѣ каждой бокъ, между которыми заключается искомой уголъ; отъ чего произойдутъ два остатка.

Потомъ съ удвоеннымъ логариѳмомъ радіуса сложи логариѳмы синусовъ обоихъ остатковъ, и изъ суммы вычти логариѳмы синусовъ двухъ боковъ, содержащихъ искомый уголъ. Остатокъ будетъ логариѳмъ квадрата синуса половины того угла. Раздѣли остаточной сей логариѳмъ пополамъ, и прінщи въ таблицахъ, какому числу градусовъ

и минутъ отвѣчаетъ частное; сіе число означитъ половину искомаго угла.

Правило сіе доказано будетъ въ третей части.

391. По предложеніи шести главныхъ случаевъ, приступимъ къ другимъ шести, которые изъ нихъ проистекаютъ.

ВОПРОСЪ VII.

По даннымъ двумъ угламъ F *и* G (фиг. 17) *и противоположенному боку* GE, *найти бокъ* EF, *лежащій противъ другаго извѣстнаго угла* G?

Здѣлай дополнительной треугольникъ ABC, въ которомъ чрезъ вычисленіе дополненій угловъ F и G, и бока GE, опредѣли (365) бока AC, AB и уголъ B; послѣ чего здѣлавъ выкладку для угла C по изъясненному правилу въ вопросѣ II, и взявъ дополненіе его, получишъ бокъ EF (365).

Рѣшеніе сіе представляется здѣсь единственно для удержанія сходства съ предыдущими случаями; впрочемъ данной вопросъ можетъ рѣшиться непосредственно по посылкѣ (378) такъ:

$$\textit{син}.\ F : \textit{син}.\ GE = \textit{син}.\ G : \textit{син}.\ FE.$$

ВОПРОСЪ. VIII.

По даннымъ двумъ угламъ F и G (фиг. 17) и противоположенному боку GE, найти третій уголъ E?

Чрезъ вычисленіе дополненій данныхъ трехъ частей опредѣли въ дополнительномъ треугольникѣ бока AC, AB и уголъ B; здѣлай выкладку для бока BC по посылкѣ вопроса II; дополненіе сего бока покажетъ величину искомаго угла E (365).

ВОПРОСЪ IX.

По извѣстнымъ двумъ бокамъ EF, EG (фиг. 17) и противоположенному углу G, найти уголъ E, заключающійся между данными боками?

Чрезъ вычисленіе дополненій данныхъ трехъ частей найди въ дополнительномъ треугольникѣ ABC уголъ B, уголъ C и бокъ AB; послѣ чего опредѣли въ семъ послѣднемъ треугольникѣ бокъ BC по пропорціи вопроса III. Дополненіе бока BC покажетъ величину угла E (365).

ВОПРОСЪ X.

По даннымъ двумъ угламъ G и E (фиг. 17) и лежащему при нихъ боку GE, найти третій уголъ F?

Чрезъ вычисленіе дополненій данныхъ трехъ частей опредѣли въ дополнительномъ треугольникѣ ABC бока AB, BC и уголъ B, заключающійся между ими; послѣ чего сыскавъ AC по посылкѣ вопроса IV, возьми дополненіе его; оно покажетъ величину искомаго угла F (365).

ВОПРОСЪ XI.

По даннымъ двумъ угламъ G *и* E (фиг. 17), *и лежащему при нихъ боку* GE, *найти какой нибудь изъ остальныхъ двухъ боковъ, на примѣръ* FE?

Чрезъ вычисленіе дополненій извѣстныхъ трехъ частей опредѣли въ дополнительномъ треугольникѣ ABC бока AB, BC и заключающійся между ими уголъ B; потомъ сыщи по посылкѣ вопроса V уголъ C; дополненіе сего угла будетъ величина бока FE (365).

ВОПРОСЪ XII.

По даннымъ тремъ угламъ E, F, G (фиг. 17), *найти какой нибудь бокъ, на примѣръ бокъ* EG?

Чрезъ вычисленіе дополненій данныхъ трехъ частей опредѣли въ дополнительномъ треугольникѣ ABC бока BC, AC и AB; потомъ сыщи въ немъ уголъ B посылкою вопроса VI.

Дополненіе угла B будетъ величина искомаго бока EG (365).

Приступая къ примѣрамъ замѣтимъ, что хотя нѣкоторые косоугольные треугольники во многихъ случаяхъ рѣшатся двумя посылками; однако между ими находятся и такіе, которые можно рѣшить одною, и именно тѣ, у которыхъ одинъ бокъ состоитъ изъ 90°; ибо по допущеніи дополнительнаго треугольника, второй сей треугольникъ становится прямоугольнымъ.

Здѣлаемъ теперь нѣкоторые примѣры.

ПРИМѢРЪ *на вопросъ IV.*

Положимъ, что точка F (*фиг.* 1) означаетъ на землѣ положеніе Санктпетербурга, а G Москвы: извѣстно по Астрономическимъ наблюденіямъ, что Петербургъ стоитъ подъ 59° 56′ сѣверной широты, которую здѣсь представляетъ дуга BF (*), а широта Москвы или дуга GE заключаетъ 55° 45′; разность между долготами Москвы и Петербурга, показываемая дугою BE или угломъ BAE или FAG, состоитъ изъ 7° 13′, требуется опредѣлить кратчайшее разстояніе между сими городами.

(*) Въ семъ примѣрѣ секунды опущены, потому что онѣ не могутъ сдѣлать чувствительной разности.

Кратчайшимъ путемъ между двумя точками на поверхности шара почитается дуга большаго круга, проходящая чрезъ тѣ точки. Вообразимъ дугу FG. Естьли изъ дугъ AB, AE по 90° вычтешь дуги BF, GE, изъ которыхъ первая 59° 56′, а вторая 55° 45′, то въ остаткѣ получишь дуги AF 30° 4′, и AG 34° 15′; и такъ по извѣстнымъ въ треугольникѣ AFG двумъ бокамъ и лежащему между ими углу надлежитъ опредѣлить третій его бокъ, или искомую дугу GF.

Представимъ треугольникъ FAG треугольникомъ ABC (*фиг.* 18) и положимъ, что AB равна 30° 4′, BC 34° 15′, уголъ B 7° 13′; послѣ чего по правилу, изъясненному въ вопросѣ IV, дѣлаю выкладку для отрѣзка BD слѣдующею посылкою, R : *кос.* B = *танг.* AB : *танг.* BD, или R : *кос.* 7° 13′ = *танг.* 30° 4′ : *танг.* BD.

Производя дѣйствіе въ логариѳмахъ, найдемъ.

Лог. *кос.* 7° 13′ - - - - - - - - - - -	9,9965459
Лог. *танг.* 30° 4′ - - - - - - - - - -	9,7626056
Сумма - - - - - - - - - - - - -	19,7591515
Лог. радіуса - - - - - - - - - - - - -	10 . . . .
Остатокъ, или лог. *танг.* BD - - - -	9,7591515,

которому въ таблицахъ отвѣчаетъ 29° 52′; вычитаю число сіе 29° 52′ изъ BC, то есть, изъ 34° 15′, и получаю 4° 23′ за отрѣзокъ CD.

Потомъ для опредѣленія бока AC посылаю въ сходственность предписаннаго правила въ вопросѣ IV слѣдующую пропорцію, *кос.* BD : *кос.* DC = *кос.* AB : *кос.* AC, то есть, *кос.* 29° 52′ : *кос.* 4° 23′ = *кос.* 30° 4′ : *кос.* AC. И производя дѣйствіе въ логариѳмахъ, найду

Лог. *кос.* 30° 4′ - - - - - - - - - - -	9,9372385
Лог. *кос.* 4° 23′ - - - - - - - - - - -	9,9987278
Арие. допол. лог. *кос.* 29° 52′ - - - -	0,0618874
Сумма или лог. *кос.* AC - - - - - - -	19,9978537.

По которому изъ таблицъ заключаю, что дуга AC состоитъ изъ 5° 42′; слѣд. полагая 20 миль на земной градусъ, разстояніе AC будетъ близу 114 морскихъ миль; или полагая $103\frac{1}{2}$ версты на градусъ, разстояніе AC или FG будетъ заключать близу 590 верстъ Россійской мѣры.

ПРИМѢРЪ *на вопросъ VI.*

Говоря о снятіи плановъ, показали мы (320) способъ, какъ приводить углы, вымѣренные въ наклоненной плоскости, въ горизонтальное положеніе; теперь по снисканнымъ понятіямъ въ сферической Тригонометріи можно вывести новой способъ, которой состоитъ въ слѣдующемъ.

Положимъ, что три точки A, B, C находятся въ разномъ разстояніи отъ горизон-

тальной плоскости НЕ; и слѣд. вообразивъ перпендикуляры Bb, Aa, Cc на сію плоскость, получимъ треугольникъ abc такой, котораго верхи a, b, c представятъ предметы A, B, C такъ, какъ должно изобразить ихъ на картѣ.

Предположивъ, что изъ A можно видѣть прочіе два предмета, спрашивается, что здѣлать для опредѣленія угла a.

При точкѣ A вымѣряй уголъ BAC и углы BAa, CAa; первый можно вымѣрять безъ всякаго труда, а два послѣдніе по тому способу, которой показанъ былъ въ плоской Тригонометріи для *фигуры* 146 на *страницѣ* 233.

По опредѣленіи сего вообрази произвольной величины радіусъ AD, и изъ точки A какъ изъ центра, опиши имъ дуги DF, DG, GF въ плоскостяхъ угловъ BAC BAa, CAa; отъ чего произойдетъ сферической треугольникъ DGF, въ которомъ будутъ извѣстны бока DF, DG, GF, мѣра опредѣленныхъ угловъ BAC, BAa, CAa; уголъ DGF сего треугольника будетъ равенъ углу bac, потому что двѣ прямыя линѣи ba, ac будучи перпендикулярны къ сѣченію Aa двухъ плоскостей Ab, Ac, дѣлаютъ одинакой уголъ съ тѣми плоскостями, и слѣд. (349) равный сферическому углу DGF.

Пусть вымѣренные углы будутъ BAC 82° 10′ BAa 77° 42′, CAa 74° 24′; и такъ стоитъ только теперь въ сферическомъ треугольникѣ ABC (*фиг.* 15), коего бока AB, AC, BC будутъ относительно 74° 24′, 82° 10′, 77° 42′, вычислить уголъ B противуположенной боку AC 82° 10′. Почему въ сходственность сказаннаго въ вопросѣ VI нахожу половинную разность двухъ отрѣзковъ BD и CD по сей посылкѣ, *танг.* $\frac{BC}{2}$: *танг.* $\frac{AC + AB}{2}$ = *танг.* $\frac{AC - AB}{2}$: *танг.* $\frac{CD - BD}{2}$, то есть, *танг.* 38° 51′ : *танг.* 78° 17′ = *танг.* 3° 53′ : *танг.* $\frac{CD \quad BD}{2}$.

Производя дѣйствіе въ логариѳмахъ, найдемъ . . . .

Лог. *танг.* 3° 53′ - - - - - - - - - -	8,8317478
Лог. *танг.* 78° 17′ - - - - - - - - -	10,6832050
Ариѳ. дополн. лог. *танг.* 38° 51′ - -	0,0939569
Сумма, или лог. *танг.* $\frac{CD - BD}{2}$ - -	19,6089097,

которому отвѣчаетъ 22° 7′.

Вычитаю половинную сію разность 22° 7′ изъ половины BC, то есть, изъ 38° 51′, въ остаткѣ выходитъ (305) меньшой отрѣзокъ BD 16° 44′; напослѣдокъ въ прямоугольномъ треугольникѣ ABD, для опредѣле-

нія угла B, посылаю въ сходственность предписаннаго въ вопросѣ VI сію пропорцію,

танг. AB : *танг.* BD = R : *кос.* B,

то есть :

танг. 74° 24′ : *танг.* 16° 44′ = R : *кос.* B.

И производя дѣйствіе въ логариѳмахъ, получаю.

Лог. *танг.* 16° 44′ - - - - - - - - -	9,4780592
Лог. радіуса - - - - - - - - - - - - -	10 - - - -
Ариѳм. допол. лог. *танг.* 74° 24′ - -	89,4458232
Сумма, или лог. *кос.* B - - - - -	108,9239824,

которому отвѣчаетъ 4° 48′, и слѣд. дополненіе его 85° 12′ будетъ величина угла B, то есть, въ фигурѣ 19 угла *bac*.

Для приведенія угла C въ уголъ *c* вымѣряй углы ACB, AC*c*, BC*c*, и здѣлай такую же выкладку.

Что касается до третьяго угла *b*, то не нужно дѣлать для него особаго вычисленія, потому что треугольникъ *abc* есть прямолинейной, и слѣд. три угла его составляютъ 180°, или равны двумъ прямымъ.

ПРИМѢЧАНІЕ.

Не предполагая никакой части Сферическаго Треугольника больше 180°, можно утвердить самымъ простымъ образомъ объ искомомъ количествѣ, должно ли оно быть меньше 90°, или относиться равно какъ къ большему, такъ и меньшему числу сихъ градусовъ: вотъ оное правило.

А



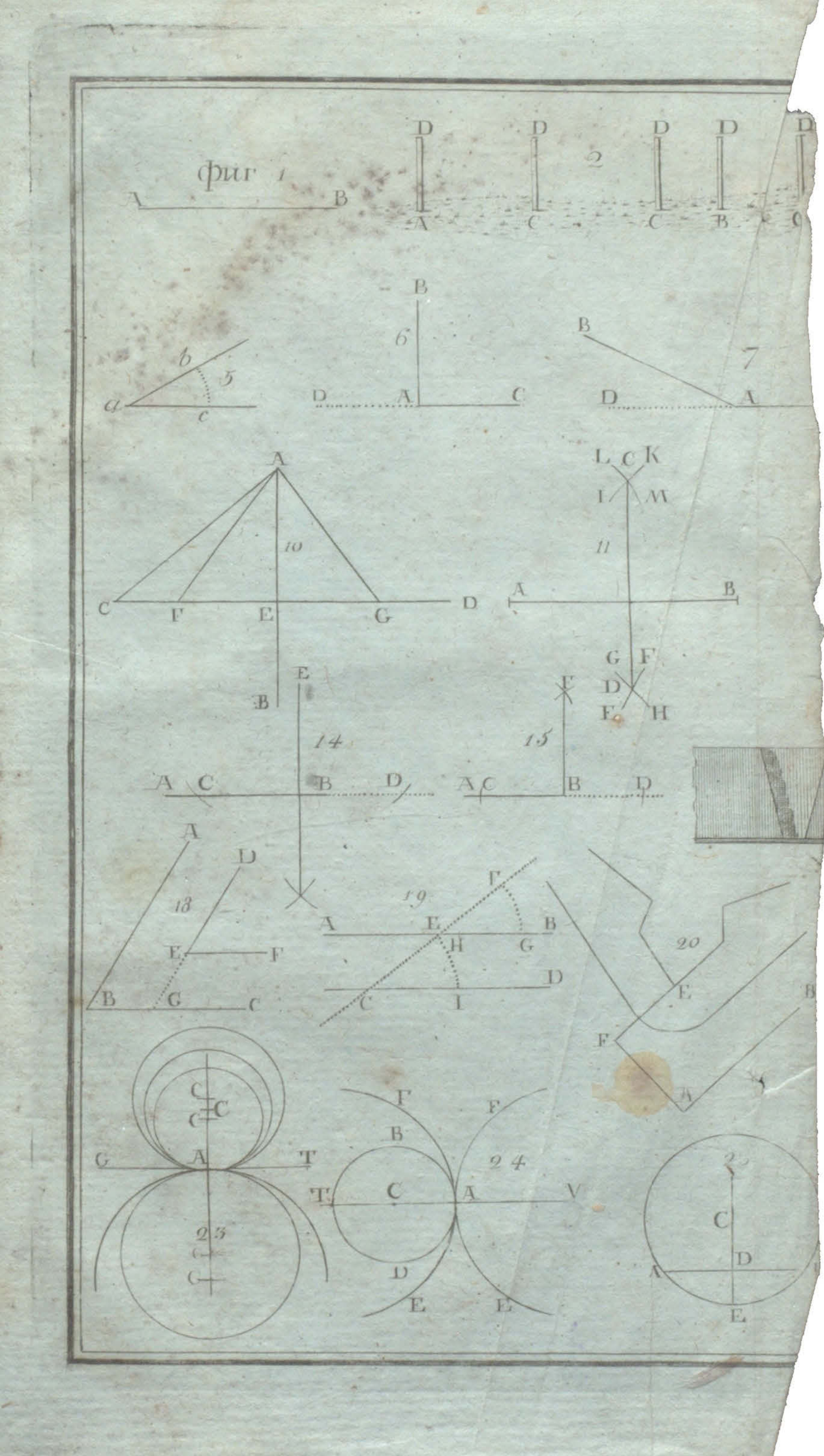
Естьли при рѣшенїи сферическаго Треугольника въ посылаемой пропорцїи выходитъ четвертымъ членомъ синусъ, то дуга, къ которой онъ долженъ относиться, можетъ быть меньше и больше 90°, выключая одинъ случай, когда треугольникъ будетъ прямоугольной и между данными частями будетъ одна против полагаться искомой части треугольника. Въ семъ случаѣ оба послѣднїя количества бываютъ (373) одного свойства между собою.

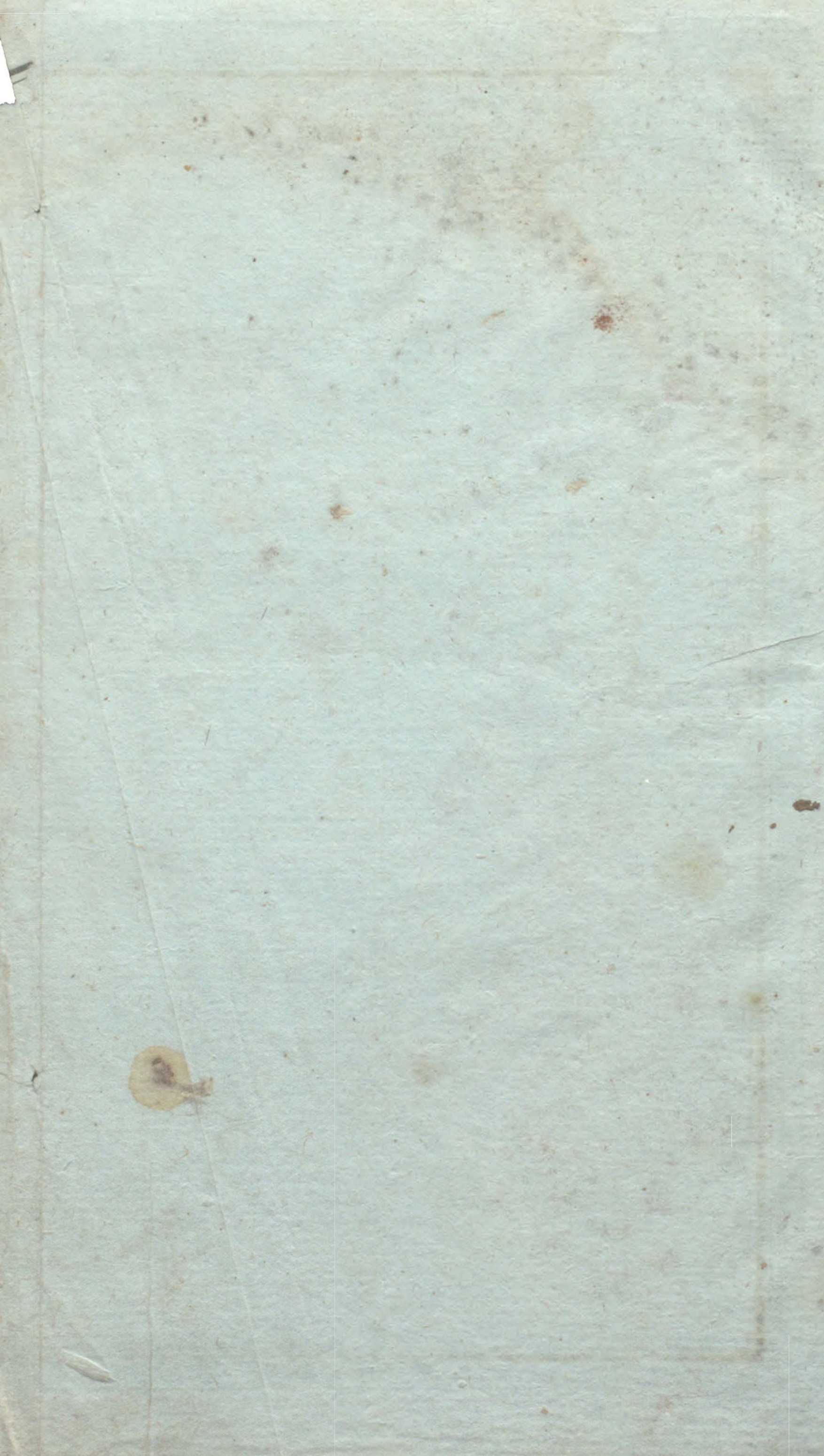
Но когда четвертымъ членомъ стоитъ косинусъ или котангенсъ или тангенсъ, то замѣть слѣдующее правило. Поставь въ извѣстныхъ членахъ пропорцїи радїусъ и всѣ синусы дугъ, къ которымъ они принадлежатъ, будутъ ли тѣ дуги больше, или меньше 90°, съ знакомъ +; поставь равнымъ образомъ всѣ косинусы, тангенсы и котангенсы дугъ меньше 90° съ знакомъ же +, но всѣ косинусы, тангенсы и котангенсы дугъ больше 90° съ знакомъ —; послѣ чего смотри: естьли число съ знакомъ — выходитъ равно нулю или четное, то четвертой членъ будетъ всегда отвѣчать меньше 90°, а когда нечетное, то будетъ относиться больше нежели къ 90°.

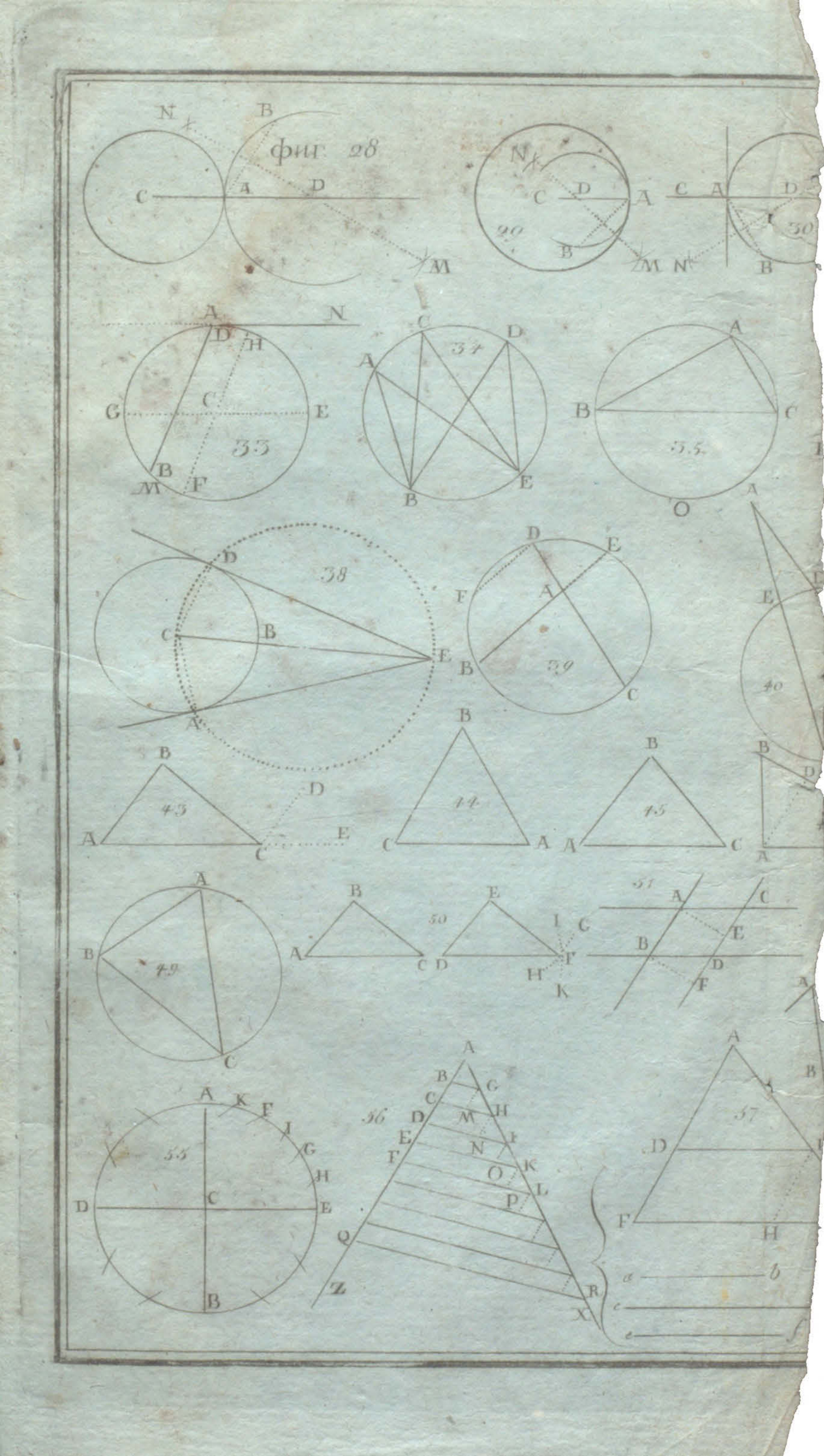
Правило сїе основывается 1е на умноженїи и дѣленїи количествъ относительно къ ихъ знакамъ, что увидимъ въ Алгебрѣ; 2е на томъ, что сказано было (277, и слѣд.) о синусахъ, косинусахъ и проч. дугъ меньше, или больше 90°.

Конецъ.




Фиг 1
2
5
6
7
10
11
14
15
18
19
20
23
24



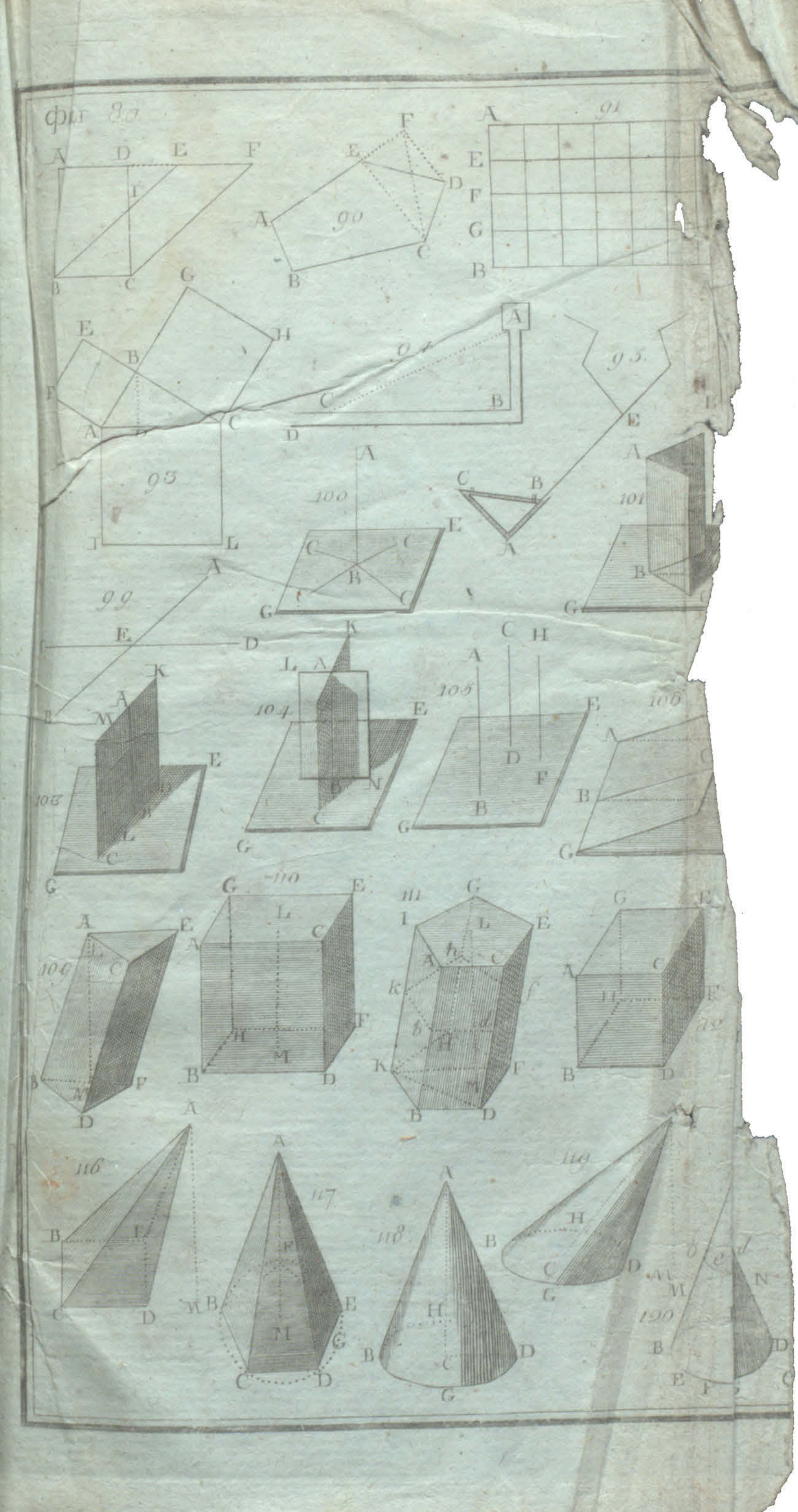


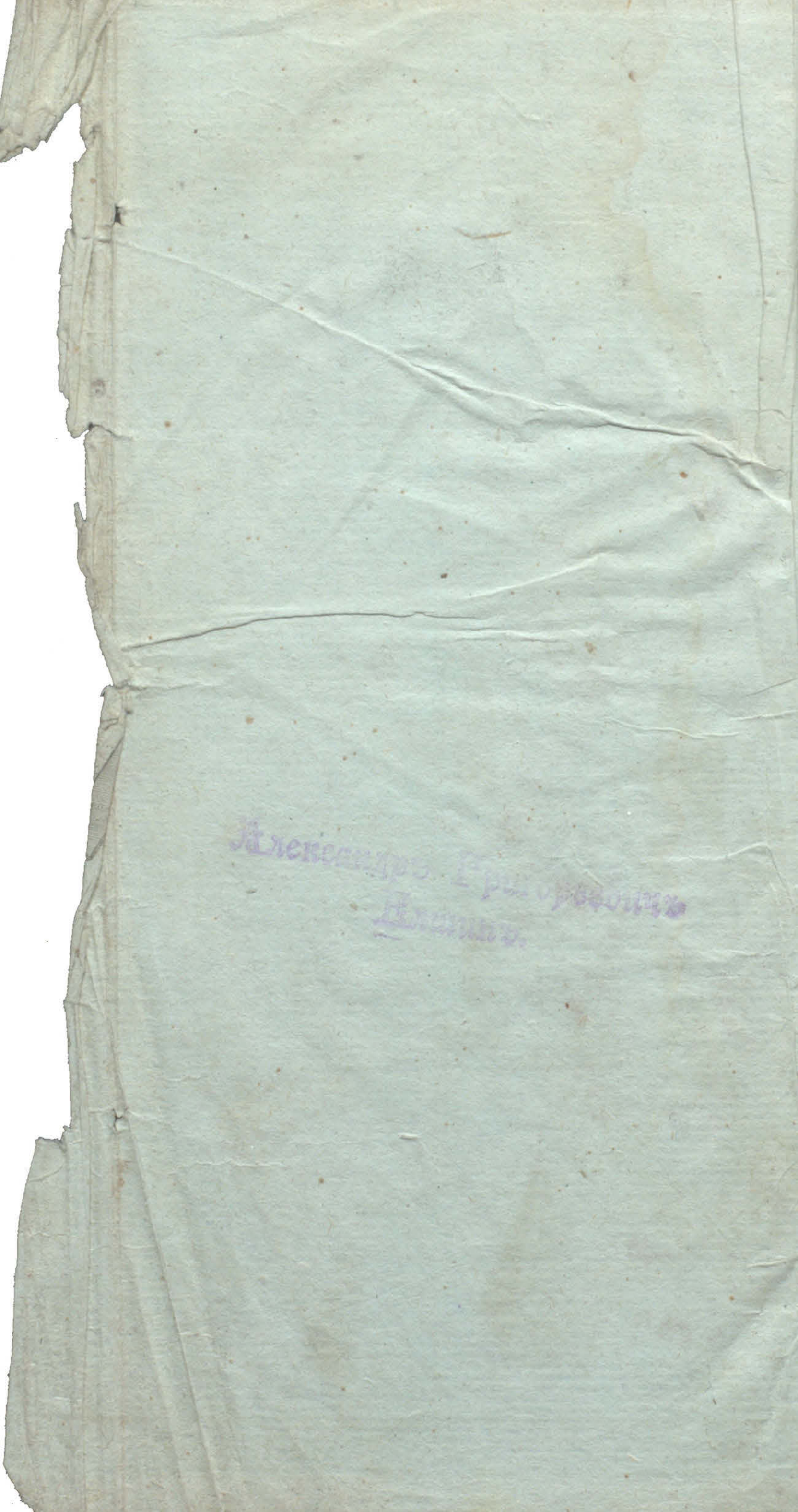
фиг. 28
29
30
33
34
35
38
39
40
43
44
45
49
50
51
55
56
57

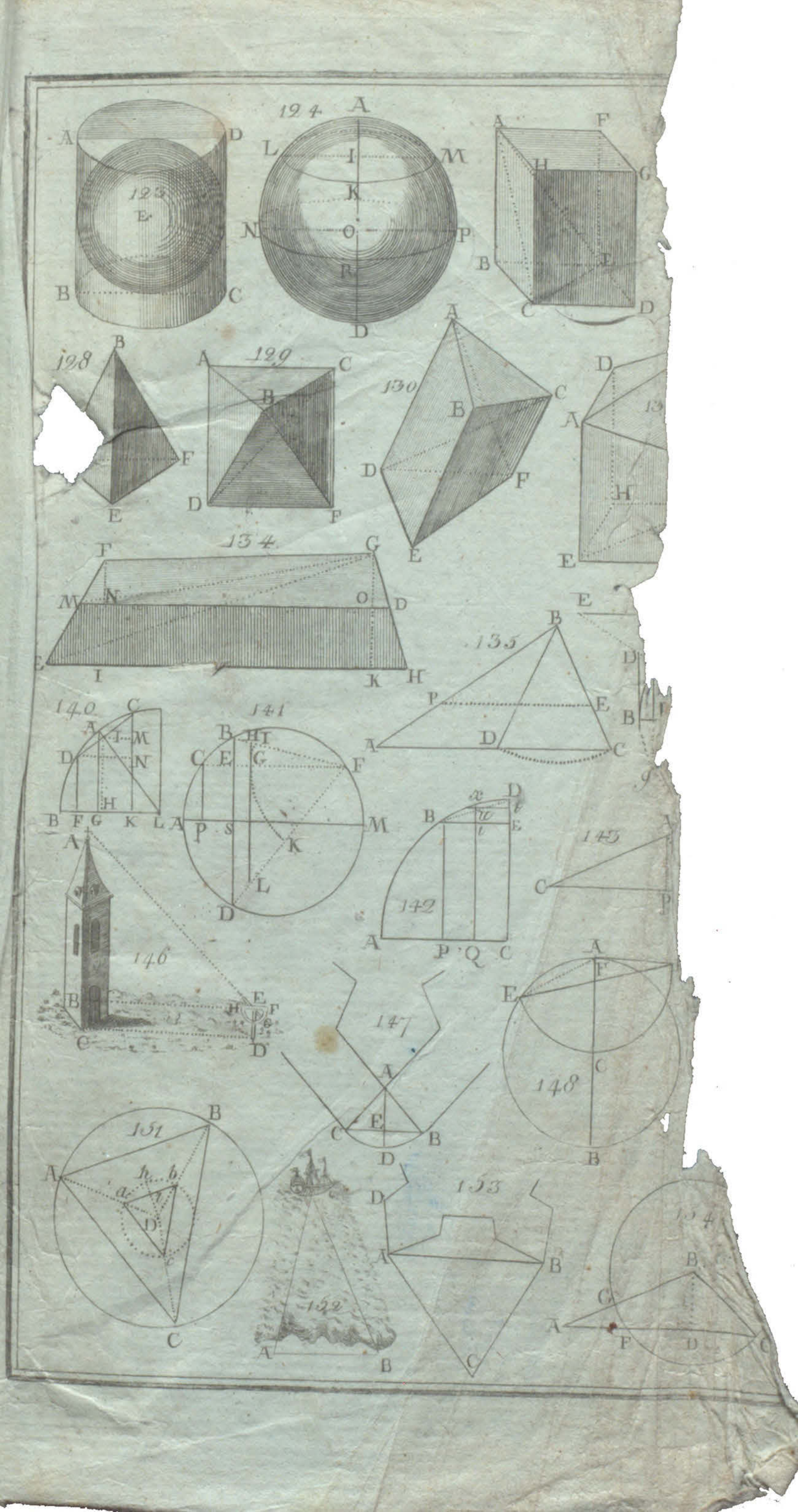
фиг 60

61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88




Фиг 89
90
91
93
94
95
99
100
101
103
104
105
106
109
110
111
116
117
118
119
120


Александръ Григорьевичъ



123
124
128
129
130
134
135
140
141
142
143
146
147
148
151
152
153
154

